



# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO LAMINAR DE FLUIDO VISCOELÁSTICO PTT EM TUBO ANULAR CONCÊNTRICO – INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE DEBORAH

Álder C. D'Ambrós<sup>1</sup>, Pedro H. Vitorassi<sup>2</sup>, Admilson T. Franco<sup>3</sup>, Rigoberto E. M. Morales<sup>4</sup>, André Leibsohn Martins<sup>5</sup>

Copyright 2008, Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis - IBP

Este Trabalho Técnico foi preparado para apresentação na *Rio Oil & Gas Expo and Conference 2008*, realizada no período de 15 a 18 de setembro de 2008, no Rio de Janeiro. Este Trabalho Técnico foi selecionado para apresentação pelo Comitê Técnico do evento, seguindo as informações contidas na sinopse submetida pelos autores. O conteúdo do Trabalho Técnico, como apresentado, não foi revisado pelo IBP. Os organizadores não irão traduzir ou corrigir os textos recebidos. O material conforme, apresentado, não necessariamente reflete as opiniões do Instituto Brasileiro de Petróleo, Gás e Biocombustíveis, seus Associados e Representantes. É de conhecimento e aprovação dos autores que este Trabalho Técnico seja publicado nos Anais da *Rio Oil & Gas Expo and Conference 2008*.

## Abstract

The success of oil well drilling process depends on the correct prediction of the velocities and stresses fields inside the gap between the drill string and the rock formation. Using CFD is possible to predict the behavior of the drilling fluid flow along the annular space, from the bottom to the top of the well. Commonly the drilling fluid is modeled as a Herschel-Bulkley fluid. An alternative is to employ a non-linear viscoelastic model, like the one developed by Phan-Thien-Tanner (PTT). In the present work the PTT constitutive equation is used to model the drilling fluid flow along the annular space. Thus, this work investigates the influence of the Deborah number on the laminar flow pattern through the numerical solution of the equations formed by the coupled velocity-pressure-stress fields. The results are analyzed and validated against the analytical solution for the fully developed annular pipe flow. The relation between the Deborah number ( $De$ ) and the entry length is investigated, along with the influence of high values of Deborah number on the friction factor, stress and velocity fields.

## 1. Introdução

As indústrias de alimentos, química e de conformação de polímeros, além da indústria do petróleo, comumente trabalham com misturas líquidas de características não-newtonianas, o que torna a adequada compreensão das características do escoamento dos fluidos não-newtonianos de vital interesse econômico.

Existem diversos modelos matemáticos que buscam representar o escoamento de fluidos não-newtonianos. Esses modelos podem ser divididos em categorias, de acordo com as características do fluido que representam. Na maioria dos estudos do escoamento de fluidos não-newtonianos em espaços anulares, aplicados à indústria, são utilizadas funções de viscosidade, para o modelo de fluido newtoniano generalizado já consagradas, como Bingham, Lei de Potências e Herschel-Bulkley. Apesar desses modelos representarem bem muitas situações usuais nos escoamentos de fluidos de perfuração, existem modelos mais complexos e capazes de detalhar melhor a dinâmica do escoamento.

Dentre os modelos existentes estão aqueles que representam o comportamento de fluidos nos quais observam-se efeitos viscosos e elásticos associados. Esses modelos são chamados de viscoelásticos (Bird et al., 1987).

O modelo viscoelástico PTT (Phan-Thien e Tanner, 1977) é baseado na teoria de redes poliméricas e considera movimentos não-conjuntos das cadeias poliméricas, isto é, o deslizamento entre a rede molecular e o meio contínuo. Este modelo foi testado por vários especialistas, como Tanner (2002), que classificaram-no como um dos modelos que mais se aproxima de dados experimentais e o mais adequado para escoamentos de cisalhamento, que é o caso de um tubo anular.

<sup>1</sup> Engenheiro Mecânico - UTFPR

<sup>2</sup> Graduando, Engenharia Mecânica - UTFPR

<sup>3</sup> Doutor, Engenheiro Mecânico – UTFPR

<sup>4</sup> Doutor, Engenheiro Mecânico – UTFPR

<sup>5</sup> Consultor Sênior do Petróleo Brasileiro – TEP/CENPES/PETROBRAS

O objetivo do presente trabalho é simular e analisar o escoamento laminar de fluidos viscoelásticos, avaliando a influência do número de Deborah nos perfis de tensão, no fator de atrito e no comprimento de desenvolvimento do escoamento.

As simulações são realizadas no programa comercial PHOENICS-CFD, baseado no Método dos Volumes Finitos de Patankar (1980) e é uma ferramenta de dinâmica dos fluidos computacional bastante utilizada. Este programa possui um código semi-aberto que permite ao usuário modificar algumas rotinas existentes ou implementar novas rotinas. No presente trabalho, as equações escalares do tensor de tensões viscoelástico são adicionadas ao código do PHOENICS-CFD.

A análise do comportamento do escoamento de diferentes fluidos viscoelásticos, escoando em um tubo anular, pode fornecer informações interessantes para melhoria do processo de perfuração de poços de petróleo, e para o aprimoramento da formulação dos fluidos de perfuração.

## 2. Modelagem Matemática

### 2.1. Geometria

A Fig. 1 ilustra a geometria do tubo anular concêntrico e o sistema de coordenadas cilíndricas utilizado.  $L$  é o comprimento total do tubo,  $r_i$  o raio interno e  $r_o$  o raio externo. O parâmetro  $k$  representa a razão entre os raios. No presente trabalho emprega-se  $k = r_i/r_o = 0,25$ .

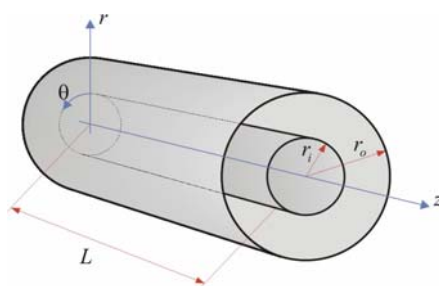


Figura 1 – Geometria do tubo anular e sistema cilíndrico de coordenadas.

### 2.2. Equações Governantes

Para que a solução do problema proposto se torne mais simples e o custo computacional das simulações reduzido, adotam-se algumas hipóteses que simplificam as equações governantes. Essas hipóteses são: regime permanente, escoamento incompressível, laminar, axissimétrico, bidimensional e isotérmico; tensor de tensões simétrico; tensões de cisalhamento nulas na direção  $\theta$ , desprezam-se efeitos gravitacionais.

Para abordar o problema em questão, adota-se a equação da conservação da massa (1) e da conservação da quantidade de movimento (2), em coordenadas cilíndricas (Bird et. al., 1987).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{v} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I}) + \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade,  $\rho$  a massa específica,  $\boldsymbol{\sigma}$  o tensor extra de tensões,  $\mathbf{g}$  o vetor gravidade,  $p$  a pressão termodinâmica local e  $\mathbf{I}$  a matriz identidade.

Aplicando as hipóteses simplificadoras, a equação da conservação da massa fica da seguinte forma:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{\partial}{\partial z} V_z = 0 \quad (3)$$

onde  $V_r$  e  $V_z$  são as componentes radial e axial da velocidade, respectivamente.

As componentes da equação da conservação da quantidade de movimento assumem a forma:

$$r: \quad \rho \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{rz} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4)$$

$$z: \quad \rho \left( V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (5)$$

onde  $\tau_{rr}$ ,  $\tau_{zz}$  e  $\tau_{\theta\theta}$  são as tensões normais e  $\tau_{rz}$  a tensão cisalhante.

Como condições de contorno, adotou-se um perfil de velocidade uniforme e conhecido na entrada do tubo, condições de não-deslizamento e impermeabilidade nas paredes e de pressão nula na saída do tubo.

### 2.3. Equações constitutivas do modelo PTT

A equação constitutiva do modelo PTT, proposta por Phan-Thien e Tanner (1977) pode ser expressa, para um material com um único tempo de relaxação  $\lambda$ , por:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \xi (\mathbf{D}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{D}^T) + \frac{Y}{\lambda} \boldsymbol{\tau} = 2G\mathbf{D} \quad (6)$$

onde  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$  é a derivada convectiva do tensor de tensões,  $\mathbf{D}$  o tensor taxa de deformação,  $\xi$  um parâmetro que determina os efeitos do deslizamento entre as cadeias poliméricas do fluido e  $G$  o módulo de relaxação do fluido. O parâmetro  $G$  é expresso pela razão entre a viscosidade à taxa de cisalhamento nula ( $\eta_0$ ) e o tempo de relaxação ( $\lambda$ ).

No presente trabalho adota-se o modelo PTT simplificado, chamado de PTT Affine (Tanner, 2002), no qual os efeitos de deslizamento entre as cadeias poliméricas são desconsiderados ( $\xi = 0$ ).

Para a função  $Y$ , que computa os efeitos elásticos do escoamento, é utilizada a forma linear:

$$Y = \left( 1 + \frac{\varepsilon}{G} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \right) \quad (7)$$

o parâmetro  $\varepsilon$  indica a resposta extensional do fluido a uma tensão.

Aplicando as hipóteses simplificadoras têm-se as componentes escalares do tensor de tensões para o modelo reológico PTT Affine (Tanner, 2002):

$$rr: \quad V_r \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + V_z \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial z} - 2 \left( \tau_{rr} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \tau_{rz} \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) + \frac{Y}{\lambda} \tau_{rr} = 2G \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad (8)$$

$$\theta\theta: \quad V_r \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial r} + V_z \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial z} - 2 \left( \tau_{\theta\theta} \frac{V_r}{r} \right) + \frac{Y}{\lambda} \tau_{\theta\theta} = 2G \frac{V_r}{r} \quad (9)$$

$$zz: \quad V_r \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial r} + V_z \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - 2 \left( \tau_{rz} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \tau_{zz} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \frac{Y}{\lambda} \tau_{zz} = 2G \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (10)$$

$$rz: \quad V_r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + V_z \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \left( \tau_{zz} \frac{\partial V_r}{\partial z} + \tau_{rr} \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{V_r}{r} \tau_{rz} \right) + \frac{Y}{\lambda} \tau_{rz} = G \left( \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \quad (11)$$

### 3. Modelagem Numérica

As equações de (3) a (5) e de (8) a (11) a serem resolvidas no PHOENICS-CFD devem ser implementadas na forma geral mostrada pela equação (12).

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)}_{\text{transiente}} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \phi)}_{\text{convectivo}} = \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma_{\phi} \nabla \phi)}_{\text{difusivo}} + \underbrace{S_{\phi} + P_{\phi}}_{\text{fonte}} \quad (12)$$

Na equação (12),  $\Gamma_{\phi}$  é o coeficiente difusivo,  $S_{\phi}$  e  $P_{\phi}$  são os termos fonte. Os termos,  $\Gamma_{\phi}$ ,  $S_{\phi}$  e  $P_{\phi}$  assumem formas diferentes em função da variável  $\phi$ , que pode ser uma componente da velocidade ou da tensão. O primeiro termo desta equação diferencial geral representa a parcela transitória do fenômeno, seguida da parcela relacionada à aceleração convectiva. Do lado direito aparecem a parcela difusiva e os termos fonte. O operador divergente ( $\nabla \cdot \phi$ ) representa a quantidade líquida da variável vetorial  $\phi$  que cruza as fronteiras de um volume de controle. O termo  $P_{\phi}$  representa a componente do termo fonte dependente da pressão e  $S_{\phi}$  os termos fonte de outra natureza (Spalding, 1994).

O programa permite a ativação ou desativação de cada um dos termos apresentados na equação (12). Patankar (1980) adverte que, no caso de um termo não poder ser ajustado à equação diferencial geral, deve ser explicitado como parte do termo fonte. Assim, no presente trabalho, as parcelas das equações governantes que não se encaixam no termo difusivo nem no termo convectivo, são adicionadas no termo fonte  $S_{\phi}$  (Spalding, 1994).

Após a discretização das equações pelo método dos volumes finitos (Patankar, 1980), o programa PHOENICS-CFD emprega o método SIMPLEST para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade, sendo a equação da quantidade de movimento sucessivamente corrigida até que se obtenha um resíduo abaixo de um valor pré-estabelecido (PHOENICS, 1991). O esquema Híbrido é utilizado para a interpolação das grandezas escalares e vetoriais.

A validação numérica é feita com base nos resultados analíticos propostos por Pinho e Oliveira (2000).

## 4. Resultados

### 4.1 Influência do número de Deborah.

O número de Deborah é um parâmetro característico de fluidos elásticos, expresso pela razão entre o tempo característico de relaxação do material ( $\lambda$ ) e o intervalo de tempo no qual foi aplicada uma deformação ou tensão sobre esse material.

Na investigação da influência do número de Deborah, inicialmente realizou-se um teste de malha para  $De = 50$ . Este valor de Deborah foi adotado porque a solução analítica proposta por Pinho e Oliveira (2000), para uma condição de escoamento completamente desenvolvido, mostra que valores de Deborah acima de 50 não resultam em variação significativa nos perfis de tensão e no fator de atrito. Assim, na análise dos perfis e do fator de atrito, não é necessário simular valores de Deborah superiores a 50.

Após o teste, a malha escolhida para o estudo do efeito do número de Deborah foi de  $200 \times 200$ , não-uniforme, com refinamento nas regiões próximas às paredes e na entrada do tubo. Este refinamento é necessário porque os gradientes de tensão e velocidade são muito mais elevados nas regiões próximas às paredes e na região de entrada do tubo devido ao desenvolvimento do escoamento.

Para todos os valores de  $De$  simulados obteve-se convergência numérica. À medida que o valor de Deborah é elevado, as simulações se tornam mais lentas, mas como será visto mais à frente, mesmo para  $De = 150$  obteve-se convergência. Os valores analisados para  $De$  foram limitados a 150, devido ao tempo computacional excessivo de simulação para esses níveis de elasticidade do fluido.

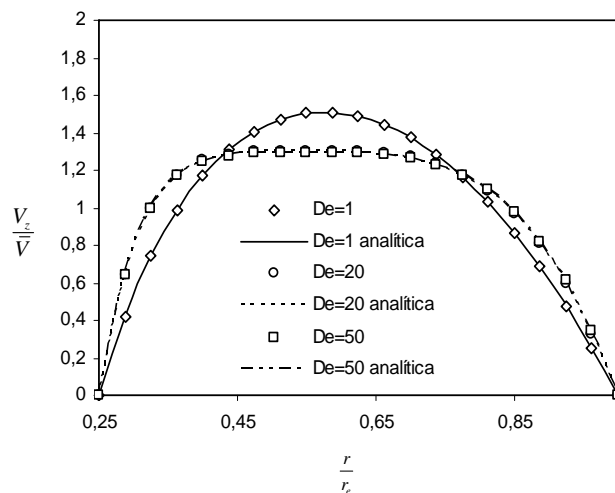


Figura 2 - Influência do número de Deborah no perfil da componente axial da velocidade adimensional, para o escoamento completamente desenvolvido. Malha de  $200 \times 200$  não-uniforme,  $\varepsilon = 0,25$ .

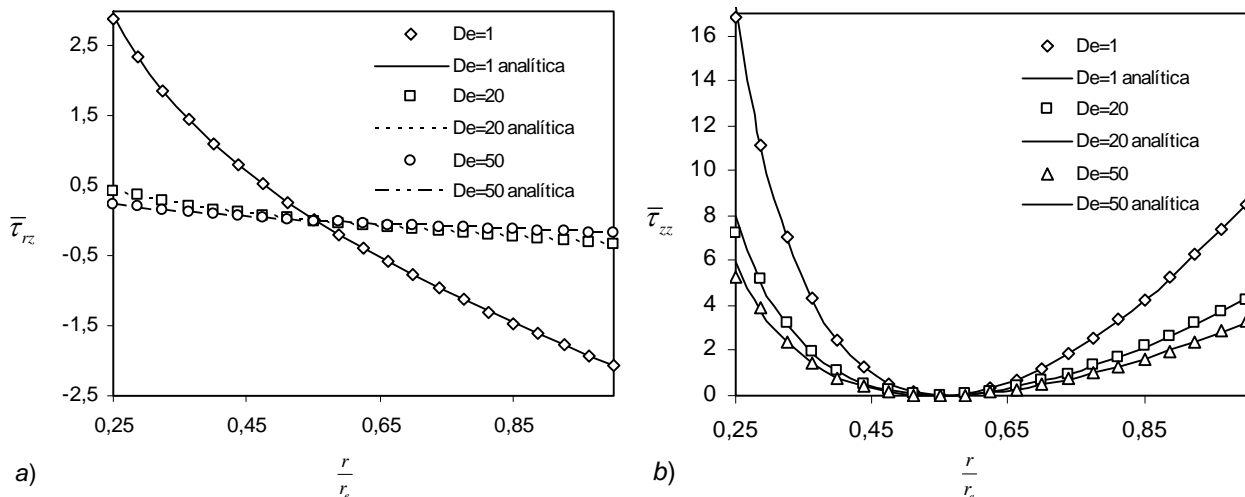


Figura 3 – Influência do número de Deborah no perfil da (a) tensão cisalhante adimensional e da (b) tensão normal adimensional, para o escoamento completamente desenvolvido. Malha de  $200 \times 200$  não-uniforme,  $\varepsilon = 0,25$ .

A figura 2 apresenta o efeito do número de Deborah na forma do perfil da componente axial da velocidade. Observa-se um achatamento do perfil com o aumento do número de Deborah.

Nas figuras 3a e 3b observa-se uma redução significativa das tensões cisalhante e normal, respectivamente, com o aumento de  $De$ . Estas alterações nos perfis com o aumento da elasticidade do fluido se devem à ampliação do efeito *shear-thinning*. Este efeito implica na redução da viscosidade do fluido com o aumento da taxa de deformação (Pinho e Oliveira, 2000).

Observa-se na figura 3, que entre  $De = 20$  e  $De = 50$ , a influência do número de Deborah no escoamento já é muito pequena.

Para o estudo da influência de Deborah sobre o comprimento de desenvolvimento do escoamento, foram simulados valores de  $0,1 < De < 150$ .

A influência da elasticidade ( $De$ ) sobre o comprimento de desenvolvimento do escoamento e sobre o fator de atrito é apresentada na figura 4a e 4b, respectivamente.

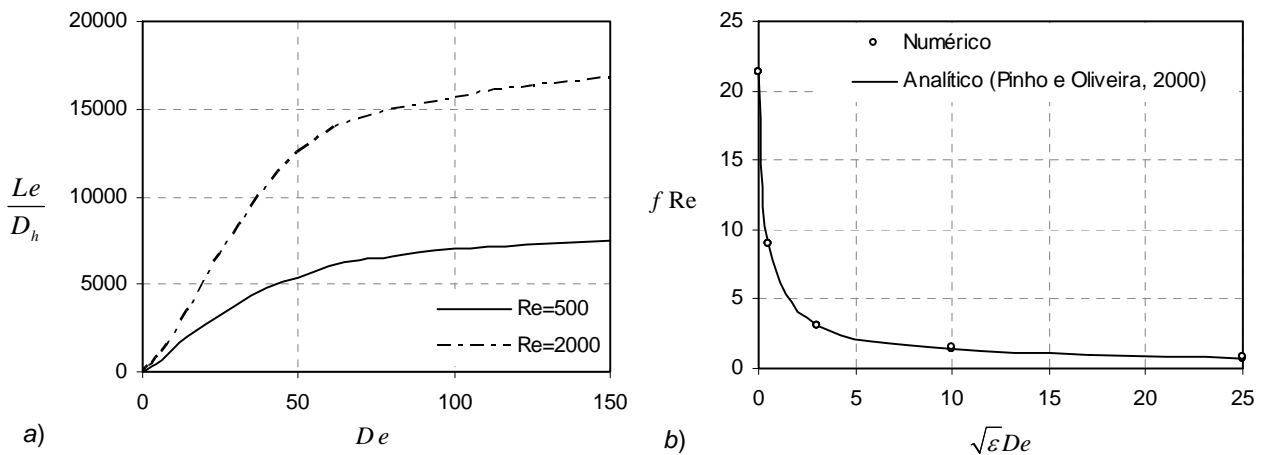


Figura 4 - Influência do número de Deborah sobre o (a) comprimento de desenvolvimento numérico adimensional ( $Le/D_h$ ) e (b) fator de atrito de Fanning. Malha de  $200 \times 200$  não-uniforme.

Percebe-se na figura 4b uma grande redução do fator de atrito com a elevação da elasticidade do fluido. Isso ocorre devido à já mencionada ampliação do efeito *shear-thinning* com o aumento da elasticidade. Esta redução pode ser útil na indústria, pois permite uma redução significativa na perda de energia por atrito. Os erros relativos, na figura 4b, entre as soluções numéricas e analíticas são da ordem de 0,15%.

Observa-se também, na figura 4b, que esta redução significativa no fator de atrito se dá no intervalo  $0 < \sqrt{\epsilon} De < 10$ , sendo que a influência da elasticidade no fator de atrito é mínima além dessa região.

A influência do número de Deborah sobre o comprimento de desenvolvimento do escoamento é apresentada na figura 4a. A análise desta influência para fluidos viscoelásticos é rara na literatura e fornece informações interessantes. A figura 4a mostra a razão entre o comprimento de desenvolvimento ( $Le$ ) e o diâmetro hidráulico ( $D_h$ ) do tubo em função do número de Deborah (neste caso com  $De$  variando entre 0,1 e 150).

Nota-se que até  $De = 50$ , a relação  $Le/D_h \times De$  é praticamente linear e a partir deste ponto, a influência de  $De$  sobre o comprimento de desenvolvimento reduz-se progressivamente. A equação (15) expressa a relação entre o comprimento de desenvolvimento numérico adimensional e o número de Deborah, para  $1 \leq De \leq 150$ ,  $Re = 500$  e  $\epsilon = 0,25$ .

$$\frac{Le}{D_h} = c_1 De^3 - c_2 De^2 + c_3 De - c_4 \quad (13)$$

sendo que  $c_1 = 0,0036$ ,  $c_2 = 1,323$ ,  $c_3 = 168,01$ ,  $c_4 = 138,63$ , com  $R^2 = 0,999$ .

Como já mencionado, a influência do aumento do número de Deborah sobre os perfis de tensão (figura 3) e sobre o fator de atrito (figura 4b) torna-se cada vez mais reduzida. Isso ocorre porque, a partir de  $De$  próximo de 50, os efeitos elásticos sobre o escoamento já estão bastante pronunciados, e os efeitos viscosos muito reduzidos, assim não ocorre mais um acréscimo significativo nos efeitos elásticos com a elevação de  $De$ .

As figuras 5, 6 e 7 mostram os campos de velocidade e tensão cisalhante, para diferentes valores de  $De$ , ao longo do tubo anular concêntrico. A seta e a linha pontilhada mostram a região do tubo em que o escoamento se desenvolveu completamente. A velocidade de entrada do fluido é de 0,0833 m/s para todos os casos apresentados.

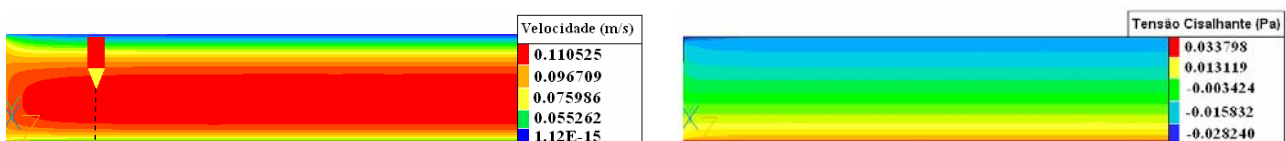


Figura 5 – Campo de (a) velocidades e (b) tensões cisalhantes para  $De = 6$ . Malha de  $200 \times 200$  não-uniforme.

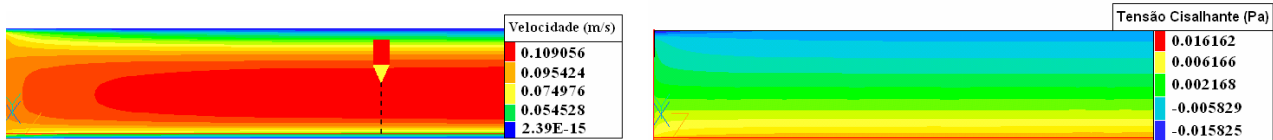


Figura 6 – Campo de (a) velocidades e (b) tensões cisalhantes para  $De = 20$ . Malha de  $200 \times 200$  não-uniforme.

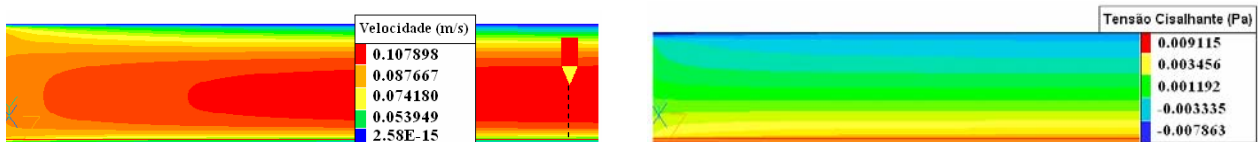


Figura 7 – Campo de (a) velocidades e (b) tensões cisalhantes para  $De = 50$ . Malha de  $200 \times 200$  não-uniforme.

Nas figuras 5a, 6a 7a observa-se claramente o aumento do comprimento de desenvolvimento do escoamento com o aumento do número de Deborah. Nas figuras 5b, 6b, e 7b observa-se uma redução significativa das tensões de cisalhamento com o aumento de  $De$ .

## 5. Conclusões

Nesse artigo foi apresentado um estudo do escoamento de um fluido de perfuração, representado pelo modelo viscoelástico PTT, em um tubo anular concêntrico. Foram realizadas simulações numéricas empregando o programa PHOENICS-CFD, com o objetivo de se avaliar a influência do número de Deborah nas características do escoamento.

Com o controle de instabilidades numéricas, foi possível simular e avaliar o escoamento de fluidos bastante elásticos (até  $De = 150$ ). Observou-se que, para uma condição de regime permanente, a elevação do número de Deborah, a partir de valores próximos de 50 (com  $\varepsilon = 0,25$ ), não influencia significativamente nos perfis de velocidade e tensão, pois para esta configuração os efeitos elásticos já estão bastante pronunciados. A influência de  $De$  sobre o comprimento de desenvolvimento do escoamento também cai progressivamente a partir de valores próximos de 50.

No caso da redução do fator de atrito com a elevação do número de Deborah, isto é, com o aumento da elasticidade do fluido, notou-se que até  $De = 20$  a redução é significativa, mas a partir deste valor a redução passa a ser mínima.

A determinação de campos de velocidade e tensão, assim como o estudo da influência da elasticidade do fluido (número de Deborah) sobre o escoamento, fornecem informações interessantes para o projeto de fluidos de perfuração mais eficientes, permitindo uma otimização do processo de perfuração de poços.

## 6. Agradecimentos

Os autores agradecem ao apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo - ANP – por meio do Programa de Recursos Humanos da ANP para o setor de Petróleo e Gás Natural PRH-ANP (PRH10 – UTFPR) e CENPES-PETROBRAS.

## 7. Referências Bibliográficas

- BIRD, B. R., ARMSTRONG, R. C. e HASSAGER, O. Dynamics of Polimeric Liquids – Fluid Dynamics. New York: Ed. John Wiley & Sons, 2 ed, v. 1, 1987.
- BRONDANI, W.M., CORADIN, H.T., FRANCO, A.T. and MORALES, R.E.M., 2006, “Numerical Simulation of Laminar Flow of a Viscoelastic Fluid through Concentric Annular”, Proceedings of the 4th National Congress of Mechanical Engineering. (in Portuguese)
- BRONDANI, W. M. Simulação Numérica do Escoamento de um Fluido Viscoelástico Através de um Tubo Anular Concêntrico. Monografia Final de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil, 2007.
- CORADIN, H. T. Simulação Numérica do Escoamento de um Fluido Viscoelástico Através de uma Contração Brusca. Monografia Final de Curso, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil, 2007.
- DOU H-S., PHAN-THIEN, N. Viscoelastic Flow Past a Confined Cylinder: Instability and Velocity Inflection, Chemical Engineering Science 62, 2007, pp. 3909 – 3929.
- GUENETTE, R., FORTIN, M. A New Mixed Finite Element Method for Computing Viscoelastic Flows, J. Non-Newt. Fluid Mech., 60 (1995) 27-52.
- PATANKAR, S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corp, 1980.
- PHAN-THIEN, N. e TANNER, R.I. A New Constitutive Equation Derived from Network Theory. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2, 1977. pp. 353-365.
- PHAN-THIEN, N., TANNER, R.I, XUE, S.-C. Numerical Modeling of Transient Viscoelastic Flows. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 123, 2004. pp. 33-58.
- PHAN-THIEN, N., XUE, S. C., TANNER, R. I. Three Dimensional Numerical Simulations of Viscoelastic Flows Through Planar Contractions. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 74, 1998. pp. 195-245.
- PHOENICS, 1991, Reference Manual, Part A: PIL. TR 200 A, Bakery House, London SW 19 5AU, UK: Concentration Heat and Momentum Limited.
- PINHO, F.T. e OLIVEIRA, P. J. Axial Annular Flow of a Nonlinear Viscoelastic Fluid – An Analytical Solution. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 93, 2000. pp. 325-337.
- PINHO, F. M. C. T. Cálculo de Escoamentos de Fluidos Não Newtonianos em Regime Laminar – Desenvolvimentos e Aplicações Recentes da Metodologia dos Volumes Finitos. Universidade do Porto, Porto, 2003.
- RAJAGOPALAN, D., ARMSTRONG, RC., BROWN, RA. Finite Elements Methods for Calculation of Steady Viscoelastic Flow Using Constitutive Equations With a Newtonian Viscosity. J of Non-Newtonian Fluid Mech 36, 1990, pp. 159-192.
- SPALDING, D.B. The PHOENICS Encyclopedia, CHAM Ltda, London, UK, 1994.
- TANNER, R I. Engineering Rheology. 2 ed. Oxford: Oxford University Press, 2002.